

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
РУБІЖАНСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ КОЛЕДЖ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

методичні вказівки і контрольні завдання

Укладач: І.Д. Глазкова

Для здобувачів освіти
заочної форми навчання

Рубіжне 2021

М 54 Методичні вказівки і контрольні завдання до виконання здобувачами освіти заочного відділення контрольної роботи та підготовки до іспитів з дисципліни «Вища математика» галузь знань 01 Освіта/Педагогіка спеціальності 015 Професійна освіта (за спеціалізацією) / І.Д. Глазкова. – Рубіжне: РППК, 2021. – 72 с.

Методичні вказівки висвітлюють особливості виконання контрольної роботи з курсу вищої математики спеціальності 015 Професійна освіта (за спеціалізацією). У вказівках приділено увагу етапам виконання контрольної роботи, короткі теоретичні відомості з курсу вищої математики, сформульовано вимоги до змісту й оформлення контрольної роботи.

© І.Д. Глазкова, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЗДОБУВАЧАМ ОСВІТИ	6
Деякі практичні поради.....	6
Про розв'язання задач	7
Вимоги до виконання та оформлення контрольної роботи.....	7
ТАБЛИЦЯ ВИБОРУ ЗАДАЧ ВАРІАНТУ	9
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ	12
ПРОГРАМА КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»	13
Комплексні числа.....	13
Елементи лінійної та векторної алгебра	13
Елементи аналітичної геометрії	13
Вступ до математичного аналізу.....	14
Диференціальне числення.....	14
Інтегральне числення	15
Ряди	15
Диференціальні рівняння	15
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ТИПОВИХ ЗАДАЧ	16
Комплексні числа.....	16
Елементи лінійної та векторної алгебра	20
Елементи аналітичної геометрії	22
Вступ до математичного аналізу.....	28
Диференціальне числення.....	30
Інтегральне числення	37
Диференціальні рівняння	44
КОНТРОЛЬНА РОБОТА	47

ПЕРЕДМОВА

Навчання вищій математиці у закладі фахової передвищої освіти полягає у забезпеченні рівня підготовки здобувачів освіти заочної форми навчання з вищої математики, необхідного для спеціальної підготовки та майбутньої професійної діяльності.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких завдань:

- формування у здобувачів освіти заочної форми навчання наукового світогляду, уявлень про ідеї і методи вищої математики, її ролі у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід’ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої мотивації до навчання;
- оволодіння здобувачами освіти заочної форми навчання мовою вищої математики в усній та письмовій формах, системою математичних знань, навичок і умінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;
- інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток у здобувачів освіти заочної форми навчання логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам’яті, уваги, інтуїції;
- екологічне, естетичне, громадянське виховання та формування позитивних рис особистості;
- формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей здобувача освіти заочної форми навчання.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення (відношення), яке дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті.

При вивченні вищої математики повинні формуватися наступні компетенції:

- *соціально-особистісні* – розуміння та сприйняття етичних норм поведінки відносно інших людей і відносно природи (принципи біоетики), здатність учитися, здатність до критики й самокритики, креативність, здатність до системного мислення, наполегливість у досягненні мети, турбота про якість виконуваної роботи;
- *загально-наукові* – розуміння причинно-наслідкових зв’язків, володіння базовим математичним апаратом, базові знання сучасних інформаційних технологій, базові знання фундаментальних наук в обсязі, необхідному для засвоєння загальнопрофесійних дисциплін;

- *інструментальні* – здатність до письмової і усної комунікації рідною мовою, навички роботи з комп'ютером, дослідницькі навички тощо.

Математичні компетентності складають основу для формування ключових компетентностей. До математичних компетентностей відносяться:

- *практична компетентність* – уміння розв'язувати типові математичні задачі:
 - використовувати на практиці алгоритм розв'язання типових задач;
 - уміти систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових; уміти розпізнавати типову задачу або зводити її до типової;
 - уміти використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язувань типових задач (підручник, довідник, Інтернет-ресурси).
- *логічна компетентність* – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень:
 - володіти і використовувати на практиці понятійний апарат дедуктивних теорій (поняття, визначення понять; висловлювання, аксіоми, теореми і їх доведення, контр приклади до теорем тощо);
 - відтворювати дедуктивні доведення теореми та доведення правильності процедур розв'язань типових задач;
 - проводити дедуктивні обґрунтування правильності розв'язання задач та шукати логічні помилки у невірних дедуктивних міркуваннях;
 - використовувати математичну та логічну символіку на практиці.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЗДОБУВАЧАМ ОСВІТИ

Основною формою заочного навчання здобувача освіти є самостійна робота, яка складається з наступних елементів: вивчення матеріалу за підручниками і виконання контрольних робіт. На допомогу здобувачеві освіти коледж організовує проведення лекцій, практичних занять індивідуальних занять та консультацій.

Вказівки по поточній роботі надаються також у процесі рецензування контрольних робіт. Завершальним етапом вивчення курсу вищої математики є здача екзамену (заліку) згідно з навчальним планом.

Деякі практичні поради

Вивчаючи матеріал за підручником, до наступного питання потрібно переходити лише після засвоєння попереднього.

Велику увагу слід звертати на визначення основних понять.

Здобувач освіти повинен повністю розібрати приклади, котрі пояснюють такі визначення, і вміти розв'язувати аналогічні приклади самостійно.

При вивченні матеріалу за підручником корисно вести конспект, в який рекомендується записувати основні визначення, зміст теорем, формул, рівняння і т. ін. На полях конспекту треба помітити питання, які виникли, для отримання письмової чи усної консультації викладача.

Про розв'язання задач

Розв'язання задач є найкращим способом закріплення матеріалу.

При розв'язуванні задач потрібно обґрунтувати кожен крок розв'язку, виходячи із теоретичних положень курсу. Якщо здобувач освіти бачить декілька шляхів розв'язку, то він повинен порівняти їх і вибрати найкращий.

Корисно до початку розв'язку скласти короткий план розв'язку. Розв'язок задач і прикладів потрібно робити докладно, розрахунки розташовувати послідовно, відділяючи допоміжні розрахунки від основних. Креслення можна виконувати від руки, але охайно і згідно з даними умовами задач.

Розв'язання кожної задачі повинно доводитись до відповіді, якої вимагає умова, і по можливості в загальному вигляді з виводом формул. Потім в отриману формулу підставляють чисельні значення (якщо вони є). У проміжних розрахунках не варто вводити наближені значення коренів, чисел і т. ін.

Вимоги до виконання та оформлення контрольної роботи

Контрольна робота повинна виконуватися в окремому зошиті шкільного формату, допускається також друкований або комп'ютерний її варіант. На кожній сторінці повинні бути залишені поля не менш 3 см для зауважень викладача, а сторінки мають бути пронумеровані.

На обкладинці повинен бути приклеєний титульний листок затвердженого зразка (в якому вказано: шифр, спеціальність, прізвище, ім'я, по батькові здобувача освіти, дисципліна та номер роботи).

Робота повинна бути виконана акуратно, розбірливо. Кожну задачу потрібно починати з нової сторінки. Умови задач повинні бути переписані повністю.

Розв'язання задач бажано розмістити в порядку номерів, вказаних у завданнях, номери задач слід вказати перед умовою.

При оформленні контрольної роботи необхідно дотримуватись загальних вимог до культури оформлення:

- дотримуватися абзаців;

- важливі формули, рівності, означення потрібно виділяти в окремі рядки, щоб зробити їх більш наглядними;

- велику увагу слід приділяти правильному написанню скорочених одиниць величин;
- необхідно правильно використовувати математичні символи.

Розв'язання задач повинно супроводжуватися коротким, але достатньо обґрунтованим поясненням, використані при розв'язанні задач формули повинні бути виписані.

Креслення слід виконувати олівцем з використання інструментів для креслення, дотримуватись масштабу.

Наприкінці роботи слід вказати використану літературу, поставити дату виконання роботи та підпис.

Якщо в роботі допущені помилки, то здобувач освіти повинен виконати всі вказівки викладача, зроблені в рецензії.

Контрольна роботи повинна бути виконана в терміни (згідно з навчальним планом-графіком). В період сесії роботи на перевірку не приймаються.

Робота, що виконана не по своєму варіанту, не зараховується та повертається здобувачеві освіти без оцінки.

Здобувачі освіти, у яких не зарахована контрольна робота, до екзамену (заліку) не допускаються.

Контрольна робота має 100 варіантів. Варіант роботи обирається по двом останнім цифрам шифру. Наприклад, здобувач освіти, який має шифр 1583 одержує варіант 83. студенти, у яких шифри від 1 до 9, повинні додати на початку цифру «0», тобто 01, 02, 03,...,09.

Кожний варіант містить задачі, які визначаються у таблиці відповідним рядком варіанта. Наприклад, для варіанта 01 треба розв'язати приклади: 39; 75; 146; 185; 242; 275; 303; 362; 423. А для варіанта 50 відповідно приклади: 12; 95; 123; 204; 258; 286; 294; 387; 417.

ТАБЛИЦЯ ВИБОРУ ЗАДАЧ ВАРІАНТУ

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	23	61	136	162	231	272	295	355	401
01	39	75	146	185	242	275	303	362	423
02	55	88	155	203	264	290	311	373	416
03	12	103	123	163	236	281	322	389	408
04	24	111	116	208	245	280	335	361	418
05	1	63	137	218	253	279	347	354	409
06	40	76	138	164	256	269	297	374	422
07	56	62	124	227	241	290	304	375	402
08	13	72	122	170	264	281	321	395	424
09	2	81	117	180	235	279	312	400	410
10	25	89	148	165	263	280	296	388	426
11	26	82	156	169	244	274	310	375	408
12	57	77	155	186	254	289	334	360	407
13	3	63	118	189	244	275	337	363	417
14	14	83	137	166	253	290	346	376	403
15	41	104	138	196	254	282	339	362	421
16	4	84	147	226	252	269	323	376	415
17	26	90	125	217	236	282	336	361	425
18	58	73	119	167	252	276	302	388	404
19	5	64	139	179	245	269	311	374	411
20	27	78	147	187	263	278	321	378	420
21	15	64	157	190	251	270	291	377	414
22	28	105	120	168	240	281	334	390	406
23	27	112	156	168	246	277	333	384	425
24	6	91	139	193	265	283	322	377	419
25	42	86	154	181	243	288	312	363	428
26	59	65	121	188	235	271	301	378	409
27	29	85	158	169	237	276	303	359	424
28	7	79	148	188	232	279	348	356	405
29	28	87	121	219	243	278	320	373	413
30	30	92	157	197	262	280	313	400	426
31	43	74	122	170	255	283	304	364	405
32	31	65	126	171	257	289	296	353	412
33	8	66	146	228	255	271	294	379	419
34	60	88	140	209	247	270	324	358	416
35	29	80	123	171	251	290	337	364	411
36	9	93	136	189	239	277	345	385	427

37	16	106	127	202	254	287	295	380	407
38	1	89	140	216	262	278	309	378	410
39	44	113	158	172	261	277	333	372	427
40	32	67	124	207	247	284	317	366	420
41	10	81	145	214	256	273	313	381	423
42	30	75	120	225	266	277	301	399	406
43	2	94	149	173	244	284	338	391	412
44	45	66	135	167	237	269	344	365	404
45	11	90	125	178	246	277	325	357	413
46	17	91	159	172	250	285	319	382	421
47	3	76	149	190	238	281	309	383	418
48	31	68	161	174	242	274	314	357	428
49	33	92	128	198	234	272	349	379	422
50	12	95	123	204	258	286	294	387	417
51	18	82	126	229	231	270	298	360	407
52	46	107	141	166	265	273	301	365	403
53	4	93	160	175	233	275	308	371	414
54	34	94	153	220	248	276	314	367	401
55	13	96	150	173	238	285	305	381	411
56	35	69	129	224	267	288	339	383	406
57	19	95	127	191	253	272	305	392	422
58	32	83	159	176	261	275	297	374	401
59	47	67	134	182	238	289	332	352	412
60	14	114	122	213	257	285	302	366	421
61	5	97	144	187	232	280	326	370	416
62	20	108	128	177	240	286	350	356	402
63	36	77	119	191	260	270	320	351	415
64	6	70	116	183	268	275	315	382	410
65	48	96	141	174	245	271	306	373	408
66	15	109	142	192	259	282	343	398	423
67	33	97	130	178	233	278	299	380	402
68	21	84	129	215	248	280	315	367	413
69	7	98	151	186	237	269	300	368	405
70	49	100	150	162	249	288	308	372	402
71	16	78	160	230	241	271	293	358	420
72	37	71	133	179	239	276	340	393	415
73	8	68	121	193	241	274	318	355	401
74	34	99	130	210	249	270	316	352	403
75	50	101	120	165	233	286	307	371	409
76	17	115	117	201	252	273	327	351	424
77	9	85	118	180	234	287	291	366	409

78	22	98	143	221	249	281	300	384	425
79	38	72	131	199	242	279	331	369	414
80	39	100	131	175	246	274	306	397	404
81	18	99	161	194	266	287	328	394	416
82	35	69	152	181	260	283	316	370	414
83	51	110	118	184	268	274	298	359	403
84	10	102	151	192	232	284	292	387	419
85	19	86	132	182	250	273	317	370	413
86	36	79	142	185	236	288	336	386	410
87	23	73	144	177	250	290	319	385	405
88	52	70	119	163	243	289	340	369	428
89	20	61	153	183	258	287	338	368	408
90	24	103	133	222	239	272	335	371	426
91	11	101	117	206	234	282	292	353	417
92	40	105	152	164	267	271	341	369	415
93	21	87	143	184	231	284	329	395	404
94	53	104	132	205	247	272	342	372	418
95	37	74	134	195	240	283	330	368	427
96	25	80	116	211	251	273	318	354	411
97	22	71	145	223	235	285	307	396	406
98	54	62	154	212	259	276	299	386	407
99	38	102	135	200	248	286	293	367	412

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

основні

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика – К.: Техніка, 2003. – [1] 597 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика – К.: Техніка, 2003. – [2] 792 с.
3. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Математика (підручник для студентів ВНЗ I-II р.а. технічних спеціальностей) – К.: Вища школа, 2001 – 447 с.
4. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенько А.К. Дидактичні матеріали з математики (навчальний посібник для студентів ВНЗ I-II р.а.) – К.: Вища школа, 2001 - 271 с.
5. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов – М: Наука, 1980 – 496 с.
6. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика – М. : Высшая школа, 1991 – 480 с.

додаткові

7. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу (підручник) , 10-11 кл. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002.
8. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класу загальноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2005
9. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл.– К.: Школяр, 2004, Освіта, 2001
10. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. За ред. Слєпкань З.І. 11 кл. – Х.: Гімназія, 2005
11. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. За ред. Слєпкань З.І. 11 кл. – Х.: Гімназія, 2005
12. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Математика. Тести для самостійної роботи та контролю знань, 10-11 кл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003
13. Роева Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра і початки аналізу в таблицях. 10, 11 кл. – К.: Країна мрій, 2003

ПРОГРАМА КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Комплексні числа

Комплексне число, уявна одиниця. Означення комплексного числа і уявної одиниці, степінь уявної одиниці.

Дії над комплексними числами. Додавання, добуток, частка комплексних чисел в алгебраїчній формі.

Форми комплексними числами. Геометричне зображення комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа, дії над комплексними числами в тригонометричній формі, показникова форма комплексного числа, дії над комплексними числами в показниковій формі.

Елементи лінійної та векторної алгебра

Вектори, матриці, визначники. Означення вектора, типи векторів, порівняння векторів. Дії над векторами: транспонування, додавання, множення вектора на число, скалярний добуток векторів, векторний та мішаний добуток векторів; властивості цих операцій, їх геометрична ілюстрація. Довжина (норма) вектора, її властивості. Кут між векторами. Відстань між векторами. Означення, типи матриць; основні особливі матриці (квадратна, трикутні, діагональна, одинична). Порівняння матриць. Дії над матрицями: додавання, множення матриці на число, на вектор, на матрицю, їх властивості. Транспонування матриці. Поняття оберненої матриці, властивості операції обернення матриці. Означення визначника, правила обчислення визначників. Властивості визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розгорнута та матрична форми її запису. Означення розв'язку, сумісної або несумісної, визначеної або невизначеної системи. Розв'язування квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці, за формулами Крамера. Поняття про ранг матриці та його обчислення.

Елементи аналітичної геометрії

Система координат, пряма та площина. Прямокутна декартова система координат на площині. Рівняння прямої на площині: з кутовим коефіцієнтом, загальне, в'язки прямих, через задану точку, через дві точки, у відрізках на координатних осях, нормальне; віддаль та відхилення точки від заданої прямої. Взаємне розміщення двох прямих: перетин прямих, умови паралельності та перпендикулярності, кут між прямими. Графічне розв'язування систем лінійних рівнянь або нерівностей з двома змінними. Координати точки у просторі. Загальне рівняння площини у тривимірному просторі, нормальне рівняння. Віддаль і

відхилення точки від площини. Рівняння прямої у тривимірному просторі як переріз двох площин.

Криві та поверхні другого порядку. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи; дослідження їх форми, властивостей. Загальне рівняння кривої другого порядку, його зведення до канонічного вигляду. Поняття про зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.

Вступ до математичного аналізу

Функціональна залежність. Означення функції однієї та багатьох змінних. Способи подання функції: табличний, графічний, аналітичний, описовий. Окремі спеціальні класи функцій: явні та неявні, задані параметричне, складені (задані суперпозицією). Монотонні, парні та непарні, опуклі та вгнуті, обмежені та необмежені функції. Класифікація функцій.

Числові послідовності. Поняття числової послідовності, способи її подання (аналітичний, рекурентний). Обмежені та необмежені числові послідовності. Збіжні числові послідовності, нескінченно малі, нескінченно великі послідовності, зв'язок між ними. Монотонні числові послідовності. Число e .

Границя функції. Означення границі функції в точці. Критерій Коші збіжності функції в точці. Односторонні границі функції однієї змінної. Властивості збіжних у точці функцій: обмеженість функції в околі точки збіжності, дії над збіжними функціями. Еквівалентні функції, їх використання при знаходженні границі відношення функцій. Поняття повторних границь, теорема про повторні границі функції багатьох змінних. Перша та друга визначні границі. Таблиця найважливіших границь. Знаходження границь степеневих-показникових функцій.

Неперервність функції. Поняття неперервності функції в точці. Одностороння неперервність функції однієї змінної в точці, необхідна і достатня умова неперервності, класифікація точок розриву.

Диференціальне числення

Похідна та диференціал. Означення диференційованої функції, її диференціала; похідна функції однієї змінної, частинні похідні, їх властивості, геометрична ілюстрація. Похідна, диференціал суми, добутку, частки, складеної та оберненої функцій. Таблиця похідних. Похідні функцій, заданих у параметричній, неявній формах. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Дослідження функцій за допомогою диференціального числення. Умови монотонності функції однієї змінної. Необхідні, достатні умови екстремуму функції. Умови опуклості, угнутості, перегину функції. Асимптоти функції: вертикальні, горизонтальні, похилі. Схема повного дослідження і побудови графіка функції однієї змінної.

Інтегральне числення

Невизначений інтеграл. Поняття первісної функції, невизначеного інтеграла. Табличні інтеграли. Методи інтегрування: заміною змінної, частинами.

Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла. Інтегрування: заміною змінної, частинами у визначеному інтегралі. Розв'язування геометричних задач за допомогою визначених інтегралів.

Поняття про кратні інтеграли. Означення кратного інтеграла. Властивості кратного інтеграла та інтегрованих функцій багатьох змінних.

Ряди

Числові ряди. Означення числового ряду, його суми. Необхідна умова збіжності, критерій Коші збіжності числового ряду. Гармонійний ряд, його розбіжність. Достатні умови збіжності додатних числових рядів. Узагальнений гармонійний ряд. Знакозмінні числові ряди, абсолютна та умовна збіжність. Знакопочережні ряди, ознака збіжності Лейбніца.

Степеневі ряди. Означення степеневого ряду, теорема Абеля про його збіжність. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду, формули їх обчислення. Неперервність, диференційованість та інтегрованість сум степеневого ряду. Поняття про функціональну послідовність, функціональний ряд, тригонометричні ряди Фур'є.

Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння першого порядку. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку; задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку; частинний та загальний розв'язки. Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Диференціальні рівняння, які зводяться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Поняття про диференціальні рівняння вищих порядків. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКУ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Комплексні числа

Під час розв'язання багатьох задач, рівнянь, виникла потреба добувати квадратний корінь з від'ємних чисел. Квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом у множині, дійсних чисел розв'язків не мають. Постає питання про розширення множини дійсних чисел. Ввели нове число i для якого справедлива рівність: $i^2 = -1$.

Тоді, $\pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{9i^2} = \pm 3i$

Розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 13 = 0$ одержимо:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Комплексні числа часто позначають однією буквою, наприклад z .

$z = a + bi$ – алгебраїчна форма комплексного числа,

a – дійсна його частина,

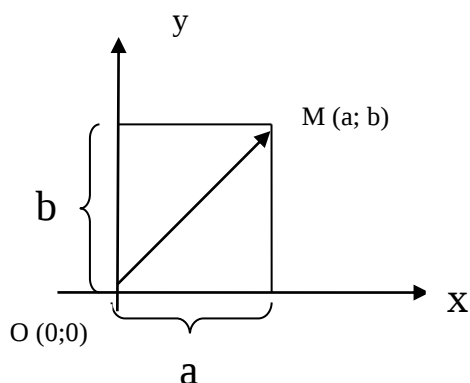
b – коефіцієнт при уявній, (i – перша буква латинського слова *imaginary* – уявний).

Додавання і множення комплексних чисел підлягає тим самим законам, що й додавання і множення дійсних чисел.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Зображають комплексні числа точками координатної площини, яку при цьому називають комплексною.

Кожному комплексному числу $a + bi$ поставлено у відповідність точку $M(a; b)$ координатної площини, абсциса якої дорівнює дійсній частині комплексного числа, а ордината - коефіцієнту уявної частини



Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Приклад. Дано комплексні числа $z_1 = -1 + 6i$ та $z_2 = 2 + 5i$. Знайти суму $z_1 + z_2$, різницю $z_2 - z_1$, добуток $z_1 z_2$ і частку z_2 / z_1 .

Розв'язання.

$$z_1 + z_2 = (-1 + 6i) + (2 + 5i) = -1 + 6i + 2 + 5i = (1 + 2) + (6 + 5)i = 1 + 11i.$$

$$z_2 - z_1 = (2 + 5i) - (-1 + 6i) = 2 + 5i + 1 - 6i = (2 + 1) + (5 - 6)i = 3 - i.$$

$$z_1 z_2 = (-1 + 6i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 12i + 30i^2 = -2 + 7i + 30(-1) = (-2 - 30) + 7i = -32 + 7i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 5i)}{(-1 + 6i)}$$

Помножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 5i)(-1 - 6i)}{(-1 + 6i)(-1 - 6i)} = \frac{-2 - 12i - 5i - 30i^2}{1 - 36i^2} = \frac{-2 - 17i + 30}{1 + 36} = \frac{28 - 17i}{37} = \frac{28}{37} - \frac{17}{37}i$$

Степінь i

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, i^9 = i.$$

Модуль і аргумент комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається довжина вектора, яка відповідає цьому числу.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргументом комплексного числа називається величина кута між додатним напрямком дійсної осі й вектором z , при чому величину кута вважають додатною, якщо відлік ведуть проти стрілки годинника, і від'ємною, якщо відлік ведуть за стрілкою годинника.

Аргумент знаходимо з системи :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Тригонометрична форма комплексного числа: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Приклад. Подати число $z = 1 - i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання.

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) \text{ або } z = r(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі.

Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі.

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ і } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Для частки, помноживши чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику, дістанемо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi).$$

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

де $\sqrt[n]{r}$ – арифметичний корінь,

Піднесення до степеня і добування кореня.

$$r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

Число z називається коренем степеня n з числа ω (позначається $\sqrt[n]{\omega}$), якщо $z^n = \omega$.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \omega = s(\cos \psi + i \sin \psi).$$

$$r^n = s \text{ і } n\varphi = \psi + 2\pi k,$$

$$r = \sqrt[n]{s} \text{ і } \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n} k, k \in \mathbb{Z}.$$

Приклади. Виконати дії: $z = \frac{(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) (2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}))}{\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})}$.

Розв'язання.

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), r_1=1, \gamma_1 = -\frac{\pi}{3};$$

$$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), r_2 = 2, \gamma_2 = \frac{\pi}{6};$$

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}), r_3 = \sqrt{2}, \gamma_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$r = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = \frac{-4\pi + 2\pi - 9\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12}.$$

$$\text{Отже, } z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) \right).$$

Дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі:

$$1. r_1 e^{i\gamma_1} \cdot r_2 e^{i\gamma_2} = r_1 r_2 e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

$$2. \frac{r_1 e^{i\gamma_1}}{r_2 e^{i\gamma_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$3. (re^{i\gamma})^n = r^n e^{in\gamma}$$

$$4. \sqrt[n]{re^{i\gamma}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\gamma+2h\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Приклади: 1 Записати в показниковій формі комплексне число $z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

Розв'язання.

$$z = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ число лежить в четвертій чверті, отже } \gamma = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

2. Записати в показниковій формі $z = (-1 + i)^5$

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k)}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Показникова форма запису комплексного числа.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Вище було показано, що кожне комплексне число $z \neq 0$ можна записати в тригонометричній формі:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси, а також з формули Ейлера випливає, що кожне комплексне число $z \neq 0$ можна записати і в такій формі: $z = re^{i\varphi}$.

Дії над комплексними числами в показниковій формі.

Нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тоді

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Знаючи формулу Ейлера, формулу для піднесення комплексного числа до натурального степеня можна переписати так:

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Формулу, яка дає всі розв'язки рівняння $z^n = \omega$, завдяки формулі Ейлера можна допереписати в компактнішому вигляді:

$$z_k = \sqrt[n]{s} e^{i(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}, k=0, \dots, n-1.$$

Елементи лінійної та векторної алгебра

Визначники другого і третього порядків можна обчислити за формулами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} \right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для обчислення визначників вищого порядку застосовують теорему Лапласа про розклад визначника n -го порядку за елементами рядка або стовпчика. Визначники з числовими елементами, використовуючи їх властивості, перетворюють так, щоб обернулися на нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка або стовпчика. Розкладаючи потім визначник за елементами цього рядка або стовпчика, зводимо задачу обчислення визначника n -го порядку до знаходження одного визначника $(n - 1)$ -го порядку.

Приклад. Знайти визначники другого порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta);$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 0.$$

Приклад. Знайти визначники третього порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 3 = 40;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 = 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta -$$

$$- \sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha).$$

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} = \\
 = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Правило Крамера.

За правилом Крамера система n -лінійних рівнянь з n невідомими сумісна і визначена, якщо $\Delta \neq 0$. Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_j = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, то система сумісна, але невизначена. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система лінійних рівнянь не сумісна.

Матриці, дії над матрицями. Обернена матриця.

Нагадаємо, що матриця, на відміну від визначника, — це таблиця чисел певного розміру. При множенні її на число треба помножити на це число кожен елемент матриці. Додавати можна тільки матриці однакового розміру, їх сумою є матриця, елементи якої є сумами відповідних елементів матриць, що додаються.

Дія множення означена тільки для таких двох матриць, які мають такі розміри: перша $m \times p$, друга $p \times n$. В результаті одержується матриця розміром $m \times n$, елементи якої дорівнюють алгебраїчній сумі добутків елементів рядків першої матриці на відповідні елементи стовпчиків другої матриці за формулою:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}.$$

Зрозуміло, що в загальному випадку дія множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Обернену матрицю A^{-1} має тільки квадратна невироджена матриця A і вона така, що виконується рівність: $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$. Якщо в матричному рівнянні $AX = B$ матриця A така, що для неї існує обернена A^{-1} , то розв'язок цього рівняння можна записати так: $X = A^{-1}B$.

Елементи аналітичної геометрії

До елементарних належать задачі: визначення відстані між двома точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

знаходження координат точки $M(x, y)$, що поділяє відрізок $M_1 M_2$ у відношенні λ , за формулами: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ і обчислення площі трикутника, заданого

координатами вершин $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$, за формулою: $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Приклад. Знайти довжину бісектриси AE і площу трикутника ABC , якщо $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ і $C(1; -4)$.

Розв'язання.

Використовуючи щойно наведену формулу, знайдемо площу трикутника

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 7 \text{ кв. од.}$$

Використовуючи властивість бісектриси $\left(\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BE}\right)$, знайдемо

відношення λ , у якому точка E поділяє відрізок CB ; $\lambda = \frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}$. Знайдемо координати точки

$$E(x, y): x = \frac{1+3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}; y = \frac{-4+3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; E\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{Отже, } AE = \sqrt{\left(\frac{8}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Пряма лінія на площині.

Геометричним образом лінійного рівняння $Ax + By + C = 0$ є пряма на площині. Змінні x та y , що входять до рівняння, — це координати множини точок, що лежать на цій прямій. Якщо поділити рівняння прямої на один з відмінних від нуля коефіцієнтів A , B , C , то це рівняння буде залежати від двох параметрів, що визначають розміщення лінії відносно прямокутної системи координат.

Наприклад, якщо поділимо на $B \neq 0$, то одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \alpha$, α — кут нахилу прямої до осі OX , b — відрізок, що відтинає пряма на осі OY .

Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$, де (x_0, y_0) — координати точки, що лежить на прямій, описує множину прямих, що проходять через задану точку.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2) , можна записати у вигляді: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Якщо рівняння прямої подати у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, то параметри a, b визначають відрізки, що відтинає пряма на відповідних осях системи координат.

Кут між двома прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ знаходять за формулою: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$, з якої можна одержати умову паралельності ($k_1 = k_2$) і перпендикулярності

$\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$ двох прямих. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$

обчислюють за формулою: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Приклад. Дано рівняння сторін AB ($x - 3y + 3 = 0$) і AC ($x + 3y + 3 = 0$) трикутника ABC . Точка $D(-1; 3)$ — основа висоти AD . Записати рівняння медіани AM , бісектриси AF і висоти AD трикутника, а також знайти кут A .

Розв'язання.

Знайдемо координати вершини A . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{cases}, A(-3; 0).$$

Запишемо рівняння висоти AD , використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x + 3}{-1 + 3} = \frac{y}{3}$ або $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$,

знайдемо кутовий коефіцієнт сторони BC трикутника: $k_2 = -\frac{2}{3}$. Тоді рівняння сторони BC

можна записати так: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1)$; або $2x + 3y - 7 = 0$. Знайдемо усі кути вершин B і C

трикутника, розв'язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + 3y + 3 = 0; \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Одержимо: $B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{9}\right)$; $C\left(10; -\frac{13}{3}\right)$. Основа медіани — це середина відрізка BC ;

$M\left(\frac{17}{3}; \frac{13}{9}\right)$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо

рівняння медіани: $3x - 18y - 43 = 0$. Знайдемо довжини сторін $AB = \frac{13\sqrt{10}}{9}$; $AC = \frac{13}{9}\sqrt{82}$. Тоді

обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону BC : $\lambda = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{41}{5}}$.

За формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ знайдемо координати основи бісектриси

$F\left(\frac{30\sqrt{5} + 4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5} + \sqrt{41})}; \frac{-13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}{9(\sqrt{5} + \sqrt{41})}\right)$. Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що

проходить через задані точки: $\frac{x+3}{3(39\sqrt{5} + 7\sqrt{41})} = \frac{-y}{13(4\sqrt{5} - \sqrt{41})}$. Для знаходження кута A

визначимо кутові коефіцієнти прямої AC — $k_1 = -\frac{1}{3}$ і прямої AB — $k_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{3}{5}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}.$$

Приклад. Дано трикутник $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $C(5; -13)$. Знайти відстань від вершини B до медіани, що проходить через точку A .

Розв'язання.

Знайдемо координати основи медіани: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7-13}{2} = -3$.

Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{-3-2}$,

або $5x + 3y - 11 = 0$. Відстань від точки $B(3; 7)$ до медіани знайдемо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 11|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{34}}.$$

Приклад. Знайти координати точки, що розташована на віддалі 5 одиниць від прямої $3x + 4y - 10 = 0$ і прямої $5x - 12y + 26 = 0$.

Розв'язання.

Нехай (x, y) — координати шуканої точки, тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{|3x+4y-10|}{\sqrt{9+16}}=5; \\ \frac{|5x-12y+26|}{\sqrt{25+144}}=5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=39; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=-91; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 3) \begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=39; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=-91. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, точок буде чотири: $A\left(\frac{72}{7}; \frac{29}{28}\right)$; $B(1; 8)$; $C(-21; -12)$; $D\left(-\frac{23}{2}; -\frac{39}{8}\right)$.

Приклад. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими $2x-9y+18=0$ і $6x+7y-21=0$.

Розв'язання.

Бісектриса є множиною точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ — одна з точок цієї множини. Тоді, прирівнюючи відстані від цієї точки до прямих, маємо:

$$\frac{|2x-9y+18|}{\sqrt{4+81}} = \frac{|6x+7y-21|}{\sqrt{36+49}} \Rightarrow |2x-9y+18| = |6x+7y-21|.$$

З останнього рівняння маємо рівняння двох бісектрис у вигляді: $4x+16y-39=0$ і $8x-2y-3=0$. Слід зазначити, що бісектриси взаємно перпендикулярні: $k_1 = -\frac{1}{4}$; $k_2 = 4$.

Криві другого порядку.

До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. У загальному випадку їм відповідає рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Шляхом перетворення системи координат із загального рівняння можна одержати канонічні рівняння кривих другого порядку:

кола: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де a, b — координати центра кола, а R — радіус кола;

еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a, b — півосі еліпса;

гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a — дійсна, b — уявна півосі гіперболи;

параболи: $y^2 = 2px$, де p — параметр параболи.

Площина і пряма у просторі.

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору $Ax + Bx + Cz + D = 0$ відображає площину.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

визначається за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умовою їх паралельності є: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, а перпендикулярності – $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{s} = (m, n, p)$ — напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, що лежить на прямій.

Пряму у просторі можна задати також параметричним рівнянням:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де t — параметр, або рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Звичайно, всі рівняння відповідають прямій у просторі і між ними існує певний зв'язок.

Площина і пряма у просторі можуть перетинатися під деяким кутом α , який визначається за формулою:
$$\sin \alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

У разі виконання умови: $Am + Bn + Cp = 0$ пряма і площина паралельні, а якщо

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ — перпендикулярні. Умовою того, що пряма лежить на площині, є виконання

співвідношень:
$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут 60° , і знаходження її відстані до точки $A(1; 3; 5)$.

Розв'язання.

Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax + By = 0$, тому що вона проходить через вісь OZ . Використаємо другу умову задачі: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A + B}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{10}}$, з якої одержимо рівняння: $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$; $\frac{A}{B} = -3$ або $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини: $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. Точка A лежить на першій площині, тому що $d_1 = 0$, а відстань її до другої площини $d_2 = \frac{|1+9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Приклад. Знайти напрямний вектор прямої $\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y = 0 \end{cases}$ і кути, які вона утворює з осями системи координат.

Розв'язання.

Вектори $\vec{N}_1(1; 1; -1)$ і $\vec{N}_2(1; -1; 0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{s}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто: $\vec{s} = (-1; -1; -2)$ або $\vec{s} = (1; 1; 2)$. Кути з осями знайдемо за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Приклад. Показати, що прямі $\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Розв'язання.

Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2; 1; 0)$ лежить на першій прямій, а $M_2(2; 4; 2)$ — на

другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; 3; 2)$. Напрямний вектор $\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{s}_2 = (3; 1; 1).$$

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Отже, прямі лежать на одній площині. Для запису рівняння цієї}$$

$$\text{площини знайдемо вектор } \vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}. \text{ Точка } M_1(-2; 1; 0) \text{ лежить на}$$

цій площині. Отже, маємо: $x + 2 + 2(y - 1) - 5z = 0$ або остаточно: $x + 2y - 5z = 0$.

Поверхні другого порядку.

Канонічні рівняння, що описують відповідні поверхні другого порядку, мають вигляд:

еліпсоїд – $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, при $a = b = c$ – сфера;

односмуговий гіперболоїд – $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

двосмуговий гіперболоїд – $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$;

конус – $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;

еліптичний циліндр – $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

гіперболічний циліндр – $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

еліптичний параболоїд – $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$;

гіперболічний циліндр – $z = \frac{x^2}{2p}$ або $z = \frac{y^2}{2q}$.

Вступ до математичного аналізу

Границя послідовності і функції.

Для кращого розуміння означення границі послідовності розглянемо приклади:

Приклад. Використовуючи означення границі послідовності довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Розв'язання.

Згідно з означенням границі послідовності для довільного $\varepsilon > 0$ треба знайти такий номер елемента послідовності N , що для всіх $n > N$ виконувалася б нерівність $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$.

Нехай вибрано $\varepsilon > 0$, за цим ε розглянемо $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, тоді $N > \frac{1}{\varepsilon}$ і для будь-якого $n > N$

маємо: $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Проілюструємо одержаний результат табличкою:

ε	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N	3	11	101	1001	10001	...

Тоді при $\varepsilon = 0,5$, починаючи з $N = 3$, відповідні n можна брати з послідовності 4, 5, ...

Для них $\frac{1}{n} < \frac{1}{3}$. Якщо $\varepsilon = 0,001$, а $N = 1001$, то тепер n можна брати з послідовності

1002, 1003, ... і знову нерівність $\frac{1}{n} < \frac{1}{1001}$ виконується. Отже, для будь-якого навіть

нескінченно малого значення ε можна знайти N , що для всіх $n > N$ нерівність $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$

виконується. Це й означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Приклад. Використовуючи означення границі функції, довести, що $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$.

Розв'язання.

Згідно з означенням границі функції для будь-якого $\varepsilon > 0$ треба знайти таке $\delta > 0$, що для тих x , для яких виконується нерівність $|x - 1| < \delta$, виконується й нерівність $|3x - 2 - 1| < \varepsilon$.

Нехай вибрано деяке $\varepsilon > 0$, за ним знайдемо $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді $|x - 1| < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$.

Повернемося до нерівності: $|3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Тобто доведено, що

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1.$$

З наведених прикладів зрозуміло, що завдання знаходження границі послідовності і функції з використанням означення досить складне. Формально для знаходження границі треба у вираз функції підставити число, до якого прямує x . Якщо в результаті підстановки одержується число, то воно дорівнює границі функції, але, як правило, за такої підстановки одержують так звану невизначеність вигляду: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , 0^∞ і т. п. Для розкриття

невизначеності дещо перетворюють вираз функції, що стоїть під знаком границі, і використовують відповідні теореми теорії границь або одну з особливих границь.

Приклади. Знаходження границь:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} + 49}{\frac{3}{7^n} - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7^n} + 49 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7^n} - 1 \right)} = -49.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1}) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1 - (x^2+1)}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \infty.$$

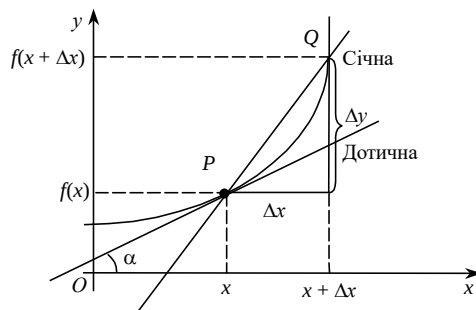
Диференціальне числення

Похідна.

Поняття похідної. Нехай $y = f(x)$ є неперервна функція аргументу x , визначена на інтервалі (a, b) . Візьмемо деяке значення незалежної змінної x і надамо їй деякого приросту Δx . Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Означення. Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приросту Δy функції $y = f(x)$ до приросту Δx незалежної змінної x називається диференціальним відношенням:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є тангенсом кута нахилу січної до осі Ox . При $\Delta x \rightarrow 0$ січна прямує до дотичної в точці P . Тангенсом кута α нахилу дотичної до осі Ox при цьому буде границя відношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Значення границі при цьому називається похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається $y' = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy(x_0)}{dx} = Df(x_0)$.

Означення. Функція називається диференційовною на інтервалі I , якщо вона диференційовна в кожній точці x цього інтервалу.

Кожному значенню x із області диференційовності функції $f(x)$ ставиться у відповідність її похідна в точці x . Отже, дістаємо похідну функцію, яку позначаємо $f'(x)$. Дія відшукування похідної функції $f(x)$ називається диференціюванням.

Похідні основних елементарних функцій

1. Похідна степеневі функції $y = x^\alpha : y' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in R.$

2. Похідна показникової функції $y = a^x : y' = a^x \ln a;$
 $y = e^x : y' = e^x.$

3. Похідна логарифмічної функції $y = \log_a x : y' = \frac{1}{x \ln a};$
 $y = \ln x : y' = \frac{1}{x}.$

4. Похідні тригонометричних функцій $y = \sin x : y' = \cos x;$
 $y = \cos x : y' = -\sin x;$
 $y = \operatorname{tg} x : y' = \frac{1}{\cos^2 x};$
 $y = \operatorname{ctg} x : y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Правила диференціювання

Правило 1. Похідна сталої дорівнює нулеві $(const)' = 0$.

$$(7)' = 0; (-100)' = 0.$$

Правило 2. Якщо u — будь-яка диференційовна функція від x і c — довільна стала, то $(cu)' = cu'.$

$$(7x^5)' = 7(x^5)' = 7 \cdot 5x^4 = 35x^4 \bullet$$

Правило 3. Якщо u та v — диференційовні функції від x , то їх сума $u + v$ є диференційовною функцією:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Аналогічно, похідна суми будь-якого скінченного числа диференційовних функцій дорівнює похідним цієї функції:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + \dots + u_n'.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$.

Розв'язання.

$$y' = (x^3 + 7x^2 - 5x + 4)' = (x^3)' + (7x^2)' - (5x)' + (4)' = 3x^2 + 14x - 5 + 0.$$

Правило 4. Добуток двох диференційовних функцій u та v є диференційовною функцією

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Приклад. Знайти y' , якщо $y = (x^2 + 1) \ln x$.

Розв'язання.

$$y' = \left[\underbrace{(x^2 + 1)}_u \underbrace{\ln x}_v \right]' = (x^2 + 1)' \ln x + (x^2 + 1)(\ln x)' = 2x \ln x + (x^2 + 1) \frac{1}{x}.$$

Правило 5. У точках, в яких $v \neq 0$, відношення $\frac{u}{v}$ двох диференційовних функцій є функція диференційовна, причому

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Приклад. Знайти y' , якщо $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 5} \right)' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 5) - (x^2 + 1)(x^2 - 5)'}{(x^2 - 5)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2 - 5) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-10x - 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-12x}{(x^2 - 5)^2}. \bullet \end{aligned}$$

Похідна оберненої функції.

Похідні обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Похідна складної функції

Правило 6. Похідна складної функції $y = f(\varphi(x))$:

$$y' = [f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x) \text{ — правило ланцюга.}$$

Приклад. Задана функція $y = f(x)$. Знайти y' .

$$1) y = \sqrt{x^5 - 10^x}; \quad 2) y = \cos^3(\ln 2x) \operatorname{tg} \frac{1}{x}; \quad 3) y = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}.$$

Розв'язання.

1) За формулою маємо:

$$g(x) = u = x^5 - 10^x; \quad f(u) = \sqrt{u};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(5x^4 - 10^x \ln 10) = \frac{5x^4 - 10^x \ln 10}{2\sqrt{x^5 - 10^x}}.$$

2) Візьмемо: $u = \cos^3(\ln 2x)$, $v = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$. Тоді за правилом 4

$$y' = (\cos^3 \ln 2x)' \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \cos^3(\ln 2x) \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)'$$

Функції $\cos^3 \ln 2x$ і $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ — складні. Маємо:

$$(\cos^3(\ln 2x))' = 3\cos^2(\ln 2x) \cdot (\cos(\ln 2x))' =$$

$$= 3\cos^2(\ln 2x)(-\sin \ln 2x)(\ln 2x)' = -3\cos^2(\ln 2x) \sin \ln 2x \frac{1}{2x} \cdot 2.$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}.$$

3) Нехай $u = \operatorname{arctg} x^3$ і $v = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Тоді за правилом 5 дістаємо:

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg} x^3)' \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \operatorname{arctg} x^3 (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))'}{\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})}.$$

Похідні функцій $\operatorname{arctg} x^3$ і $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ обчислюємо за формулою:

$$(\operatorname{arctg} x^3)' = \frac{1}{1+(x^3)^2} (x^3)' = \frac{3x^2}{1+x^6};$$

$$\begin{aligned}
(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' &= \frac{1}{1 + \sqrt{x^2+1}} (x + \sqrt{1+x^2})' = \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} (1+x^2)' \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Механічний та геометричний зміст похідної.

Джерелом диференціального числення стали, як відомо, два питання:

- 1) про відшукування швидкості в разі довільного закону руху;
- 2) про відшукування дотичної до довільної лінії.

Обидва вони привели до однієї й тієї самої обчислювальної задачі, яку було покладено в основу диференціального числення. Ця задача полягає в тому, щоб за даною функцією $f(x)$ відшукати іншу функцію $f'(x)$, яка дістала назву похідної і являє собою швидкість зміни функції $f(x)$ щодо зміни аргументу.

У механіці відповідна задача формулюється так: знайти *швидкість* тіла, що рухається за законом $s = f(t)$, у деякий момент часу t . Вважаємо, що відстань S і час t — фізичні величини, які можна вимірювати.

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло шлях $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$.

Тоді $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$.

Означення. Середня швидкість

Середня швидкість тіла, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Щоб знайти миттєву швидкість v такого тіла, потрібно перейти до границі відношення

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Означення. Миттєва швидкість

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $s = f(t)$, називається похідна функції $s = f(t)$ за часом t :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Задача. Нехай $s = \frac{1}{2}gt^2$ — рівняння вільного руху тіла, g — прискорення його вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу; у момент часу $t=2$ с.

Розв'язання.

За означенням маємо

$$v = \left(\frac{1}{2}gt^2 \right)' = \frac{1}{2}g \cdot 2t = gt.$$

Зокрема, якщо $t = 2$, дістаємо: $v = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ м/с. •

Сформулюємо тепер розглянуту задачу мовою геометрії.

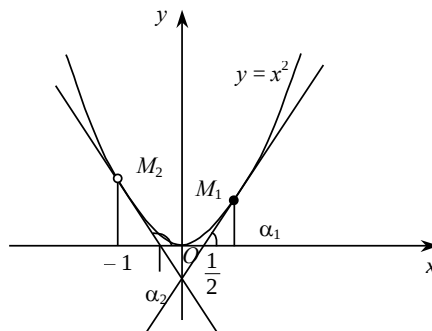
Нехай дано функцію $y = f(x)$. Диференціальне відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дорівнює тангенсу кута β , утвореного січною, що проходить через точки A та B , які мають відповідно абсциси x та $x + \Delta x$, із додатним напрямом осі Ox .

Якщо приріст $\Delta x \rightarrow 0$, то точка B прямує до точки A , а кут β — до кута α , утвореного дотичною до розглядуваної кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox . Отже, маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Значення похідної в деякій точці дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною до кривої в цій точці з додатним напрямом осі Ox .

Задача Знайти тангенси кутів нахилу дотичної до кривої $y = x^2$ у точках $M_1(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $M_2(-1; 1)$.



Розв'язання.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1}.$$

За формулою похідної степеневі функції маємо: $y' = (x^2)' = 2x$.

Отже,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2. \bullet$$

Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

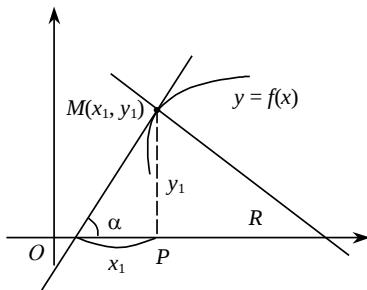
Розглянемо рівняння кривої $y = f(x)$. Візьмемо на кривій точку $M(x_1, y_1)$ і запишемо рівняння дотичної до цієї кривої в точці M , припускаючи, що дотична не паралельна жодній координатній осі.

Рівняння кривої, що має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку M , набирає вигляду $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Для дотичної $k = f'(x_1)$, тому рівняння дотичної буде таке: $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$.

Поряд із дотичною до кривої розглядають і її нормаль.

Означення. Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної в ній.



Із означення нормалі випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{норм}}$ пов'язаний із кутовим коефіцієнтом k дотичної рівністю

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k}, \text{ тобто}$$

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Отже, дістаємо рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Задача Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3$ у точці $M(1; 1)$.

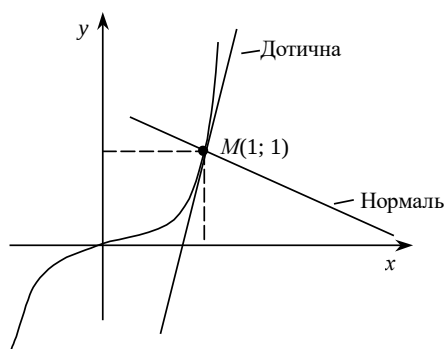
Розв'язання.

Оскільки $y' = 3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної

$$y'|_{x=1} = (3x^2)|_{x=1} = 3.$$

Отже, рівняння дотичної буде таке: $y - 1 = 3(x - 1)$, або $y = 3x - 2$.

Рівняння нормалі: $y - 1 = -1(x - 1)/3$, або $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.



Приклад. Знайти диференціал функції $y = \frac{x+3}{x^2+3}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)d(x+3) - (x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2} = \\ &= \frac{(x^2+3)dx - (x+3)2xdx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6x-x^2)dx}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

Інтегральне числення

Невизначений інтеграл.

Означення. Нехай функція $f(x)$ є похідною від функції $F(x)$, тобто $f(x)dx$ — диференціал функції $F(x)$:

$$f(x)dx = dF(x).$$

Тоді функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$.

Якщо $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, то будь-яка інша її первісна подається виразом $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Отже, якщо функція $f(x)$ має принаймні одну первісну, то їх існує безліч.

Означення. Найзагальніший вигляд первісної для даної функції $f(x)$ (або даного виразу $f(x)dx$) називається її невизначеним інтегралом.

Невизначений інтеграл виразу $f(x)dx$ позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Вираз $f(x)dx$ називають підінтегральним виразом, функцію $f(x)$ — підінтегральною функцією, змінну x — змінною інтегрування.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Властивість 1. Знак диференціала перед знаком інтеграла знищує останній:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

Властивість 2. Знак інтеграла перед знаком диференціала знищує останній, але при цьому вводиться довільний сталий доданок:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Властивість 3. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx,$$

$$a = \text{const.}$$

Властивість 4. Інтеграл алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів доданків:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx.$$

Найпростіші інтеграли. Таблиця основних інтегралів.

За формулами, якими подаються диференціали функцій, легко дістати відповідні формули інтегрування.

$$\int adx = ax + C, \text{ оскільки } adx = d(ax).$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \text{ оскільки } x^n dx = d \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \text{ оскільки } \frac{dx}{x} = d(\ln x).$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \text{ оскільки } e^x dx = de^x.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ оскільки } a^x dx = d \frac{a^x}{\ln a}.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \text{ оскільки } \cos x dx = d \sin x.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \text{ оскільки } \sin x dx = -d \cos x.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \text{ оскільки } \frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \text{ оскільки } \frac{dx}{\sin^2 x} = -d \operatorname{ctg} x.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \text{ оскільки } \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= d \operatorname{arctg} x; \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \text{ оскільки } \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= d \operatorname{arcsin} x; \operatorname{arccos} x + \operatorname{arcsin} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{const.}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C, \text{ оскільки } e^{ax} dx = \frac{1}{a} de^{ax}.$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, \text{ оскільки } \cos ax dx = ad \left(\frac{\sin ax}{a} \right).$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, \text{ оскільки } \sin ax dx = - \left(\frac{d \cos ax}{a} \right).$$

Приклад. 1. $\int 6x^7 dx = 6 \int x^7 dx = \frac{6}{8} x^8 + C = \frac{3}{4} x^8 + C.$

2. $\int (a^4 + x^4) dx = \int a^4 dx + \int x^4 dx = a^4 x + \frac{x^5}{5} + C.$

3. $\int 6\sqrt{x} dx = 6 \int \sqrt{x} dx = 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 4\sqrt{x^3} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + C.$

5. $\int (1 + \sqrt[3]{x^2}) dx = \int 1 dx + \int \sqrt[3]{x^2} dx = x + \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C.$

6. $\int (a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}) dx = \int a dx + \int \frac{b}{x} dx + \int \frac{c}{x^2} dx = ax + b \ln x - \frac{c}{x} + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}} = 2\sqrt{a+x} + C.$

Таблиця основних інтегралів.

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C; \int \text{const} \cdot dx = \text{const} \cdot x + C.$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arcctg} x + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C. \quad (a \neq 0)$$

$$19. \int \frac{x dx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. \quad (a \neq 0)$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C. \quad (a \neq 0)$$

$$22. \int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + C.$$

Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі

Нехай $F'(x) = f(x)$. Тоді $\int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C$.

Згідно з інваріантністю форми першого диференціала рівність $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$ справджується і тоді, коли x — проміжний аргумент, тобто $x = \varphi(t)$.

Це означає, що формула $\int f(x)dx = F(x) + C$ виконується й при $x = \varphi(t)$. Таким чином, $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$, або $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Метод заміни змінної дозволяє зводити інтеграли до табличних або до інтегралів, методи знаходження яких відомі. Після обчислення інтеграла $\int f(x)dx$ потрібно знову замінити x на $\varphi(t)$.

Робоча формула

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt, \\ t = \varphi^{-1}(x). \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Приклад. Знайти $\int x\sqrt{x-5}dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-5}dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-5} = t, \\ x = t^2 + 5, \\ dx = 2tdt. \end{array} \right| = \int (t^2 + 5)t \cdot 2tdt = 2 \int t^2(t^2 + 5)dt = \\ &= 2 \int t^4dt + 10 \int t^2dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{5x-3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{5x-3} = \left\| \frac{dx}{x} = \ln x + C, \right\| = \frac{1}{5} \ln |5x-3| + C.$$

Приклад. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$

Приклад. $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$

$$\int \frac{2x dx}{1+x^4} = \left| \begin{array}{l} x^2 = t, \\ dx^2 = dt, \\ 2x dx = dt. \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Приклад. $\int \frac{\cos x dx}{a + b \sin x} = \int \frac{d(a + b \sin x)}{a + b \sin x} = \ln |a + b \sin x| + C.$

Приклад. $\int \frac{e^x dx}{e^x - a} = \int \frac{d(e^x - a)}{e^x - a} = \ln |e^x - a| + C.$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = \int \frac{d \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} = \ln |\operatorname{arctg} x| + C.$$

Формула інтегрування частинами.

Згідно з формулою диференціювання добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ маємо:
 $d(uv) = u dv + v du$.

Інтегруючи цю рівність, дістаємо: $uv = \int u dv + \int v du$. Нею зручно користуватися в таких випадках:

1. Підінтегральний вираз містить як множник функції $\ln x$, $\ln(\varphi(x))$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Якщо за $u(x)$ узяти ці функції, то підінтегральний вираз $v du$ нового інтеграла буде простіший за початковий.
2. Підінтегральна функція має вигляд $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin^{ax}$, $P(x)\cos^{ax}$, де $P(x)$ — многочлен від x . Тоді, узявши за $u(x)$ $P(x)$, дістанемо інтеграл такого самого вигляду, але степінь його буде вже на одиницю меншим. Беручи цей многочлен за $u(x)$, можна знову знизити степінь на одиницю, і т. д.
3. Підінтегральна функція має вигляд $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$ і т. ін.

Після двократного інтегрування частинами дістанемо початковий інтеграл з деяким коефіцієнтом. Здобута рівність є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно шуканого інтеграла.

$$\begin{aligned} \text{Приклад. } \int \arcsin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \\ dv = dx, \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = \int dv = \int dx = x. \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад. } \int x^n \arcsin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{Приклад. } \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$$

Визначений інтеграл. Поняття визначеного інтегралу

Означення: Сума $\delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ називається інтегральною сумою.

Означення: Кінцева границя I суми δ при $\lambda = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ називається визначеним інтегралом суми $f(x)$ на відріжку $[a; b]$ і позначається

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

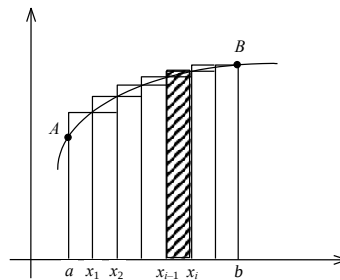
де a, b — нижня та верхня межа інтегрування $\int$ — знак інтегралу, введений Лейбніцем. У випадку існування границі І функція $f(x)$ називається інтегрованою на проміжку $[a; b]$. Лейбніц ввів знак інтегралу $\int$ у вигляді витягнутої букви S , яка позначає знак сумування.

Вводячи поняття про визначений інтеграл як про границю інтегральної суми і вводять його позначення можна рівність (1) переписати у виді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Це є відома *формула Лейбніца—Ньютона*, що пов'язує в одне обидва числення: диференціальне і інтегральне.

Властивості визначеного інтегралу.



1. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції.

2. При переставленні границь, визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Ділення відрізка інтегрування. Нехай точка $c \in [a; b]$, то $F(x)$ — буде первісною і для функції $f(x)$ для відрізків $[a; c]$ і $[c; b]$. Тоді за формулою Ньютона—Лейбніца, матимемо

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Отже

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) + F(b) - F(c) = \\ = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Визначений інтеграл суми функцій розбивається на алгебраїчну суму інтегралів.

$$\int_a^b [f(x) + \psi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

Сталий множник виноситься за знак визначеного інтегралу.

$$\int_a^b \text{const} f(x)dx = \text{const} \int_a^b f(x)dx$$

Диференціальні рівняння

Порядок звичайного диференціального рівняння визначається за: а) найвищим степенем функції; б) найвищим степенем похідної функції; в) сумою порядків всіх похідних рівняння; г) порядком старшої похідної. (Виберіть правильну відповідь.)

Приклад. Скласти диференціальне рівняння для заданої сім'ї кривих: $y = Cx$.

Розв'язання.

$$y = Cx \Leftrightarrow \ln y = \ln Cx \Leftrightarrow \ln y = \ln C + \ln x;$$

$$(\ln y)' = (\ln C + \ln x)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x};$$

$$xy' - y = 0.$$

Приклад. Знайти інтегральну криву, що належить даній сім'ї кривих та задовольняє початкові умови: $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Розв'язання.

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \Rightarrow 0 = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^0;$$

$$y' = C_2 e^{2x} + 2(C_1 + C_2 x)e^{2x} \Rightarrow 1 = C_2 e^0 + 2(C_1 + C_2 \cdot 0)e^0;$$

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1 \end{cases} \quad y = xe^{2x}.$$

Приклад. За допомогою диференціальних рівнянь розв'яжіть такі задачі: Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $M_0(-2; 5)$, якщо тангенс кута нахилу дотичної $\tan \alpha$ до неї у будь-якій точці $M(x; y)$ дорівнює абсцисі цієї точки.

Розв'язання.

Нехай рівнянням шуканої кривої l буде $y = f(x)$. За умовою задачі $\operatorname{tg} \alpha = y' = x$, тобто одержали рівняння $y' = x$, яке містить похідну функції y , з якого знайдемо невідому поки що функцію $y = f(x)$ у такий спосіб:

$$y' = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow dy = x dx \Leftrightarrow \int dy = \int x dx \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Розв'язком рівняння $y' = x$ виявилась однопараметрична сім'я парабол $y = \frac{x^2}{2} + C$, з яких треба вибрати ту, котра проходить через точку $M_0(-2; 5)$. Підставимо координати цієї точки в рівняння:

$$M_0 \in l \Leftrightarrow 5 = \frac{(-2)^2}{2} + C \Leftrightarrow C = 3.$$

Отже, рівнянням шуканої кривої буде: $y = \frac{x^2}{2} + 3$.

Диференціальні рівняння першого порядку

Приклад. $(x^2 + 1)dy = 2xydx$.

Розв'язання.

Впевнюємося, що дане рівняння належить до рівнянь з відокремлюваними змінними в диференціалах.

Нехай $y \neq 0$. Розділимо обидві частини рівняння на $y(x^2 + 1) \neq 0$, тоді одержимо рівняння з відокремленими змінними $\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$.

Після інтегрування матимемо: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1}; \ln|y| = \ln(x^2 + 1) + C_1$.

Довільну сталу C_1 , що є будь-яким дійсним числом, у даному разі доцільно записати у логарифмічному вигляді: $C_1 = \ln C$, $C \neq 0$, бо величина $\ln C$ може також бути будь-яким дійсним числом. Загальний інтеграл перепишемо так:

$$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) + \ln C, \ln|y| = \ln C(x^2 + 1).$$

Після потенціювання одержимо $\begin{cases} |y| = |C|(x^2 + 1); \\ y \neq 0, C \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0, C \neq 0; \\ y = C(x^2 + 1); \\ y = -C(x^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0, C \neq 0; \\ y = C(x^2 + 1). \end{cases}$

Останнє перетворення справедливе, бо добуток числа, що не дорівнює нулю ($-1 \neq 0$), на довільну сталу є довільною сталою величиною.

Розглянемо тепер рівняння $y(x^2 + 1) = 0$. Воно має розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок буде розв'язком диференціального рівняння, і його формально можна було б одержати із загального розв'язку при $C = 0$, знявши відповідні обмеження $y \neq 0$, $C \neq 0$. Остаточно загальним розв'язком диференціального рівняння буде:

$$y = C(x^2 + 1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок $y = 0$ буде частинним розв'язком диференціального рівняння. Особливих розв'язків це рівняння не має, однак слід зауважити, що однопараметричною сім'єю ліній при $C \neq 0$ є параболи, а розв'язок $y = 0$ — пряма лінія.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання

Обчислити визначники:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin^2 \varphi - 1 \\ 2 \cos^2 \varphi - 1 & 2 \sin \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

$$12. \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

$$13. \text{Розкладаючи за третім рядком, обчислити визначник: } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$14. \text{Розкладаючи за другим стовпчиком, обчислити визначник: } \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Обчислити визначники:

$$15. \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера. У разі залежності коефіцієнтів системи рівнянь від параметрів дослідити системи на сумісність.

$$17. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1; \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} ax_1 + bx_2 = ad; \\ bx_1 + cx_2 = bd. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 2; \\ 9x_1 + ax_2 = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4; \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 - ax_2 + 3x_3 = 2; \\ 9x_1 - 7x_2 + 8ax_3 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - bx_3 = -2. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} ax_1 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 + 2x_2 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 = 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6; \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 7; \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Знайти добутки матриць:

$$34. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$35. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & & \psi \end{pmatrix}.$$

$$36. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$37. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$38. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$39. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$40. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$41. \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$42. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$43. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2.$$

Обчислити вирази:

$$44. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$$

$$45. \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^5.$$

$$46. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}^4.$$

Знайти обернені до таких матриць:

$$47. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$48. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$49. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$50. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$51. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$52. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$53. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$54. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звести до матричного вигляду системи рівнянь і розв'язати методом оберненої матриці:

$$55. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_2 + 4x_3 = -6; \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

61. Дано вершини трикутника $A(3; 2)$, $B(-1; -1)$, $C(11; 6)$. Визначити довжини його сторін.

62. Довести, що трикутник з вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, $C(1; 7)$ прямокутний.

63. На осі ординат знайти точки, що віддалені від точки $A(4; -6)$ на відстані 5 одиниць.

64. На осі OX знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки $A(9; -3)$.

65. Знаючи координати двох протилежних вершин ромба $A(8; -3)$ та $C(10; 11)$ і довжину сторони $AB = 10$, визначити координати решти вершин.

66. Обчислити довжину медіан трикутника ABC , якщо $A(3; -2)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 4)$.

67. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $D(3; -2)$, $E(1; 6)$, $F(-4; 2)$.

68. Дано три вершини паралелограма: $A(4; 2)$, $B(5; 7)$, $C(-3; 4)$. Знайти координати четвертої вершини D , що протилежна вершині B .

69. Відрізок між точками $A(3; 2)$ і $B(15; 6)$ поділено на п'ять рівних частин. Знайти координати точок поділу.
70. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо координатами його вершин є: $(1; 4)$, $(-5; 0)$ і $(-2; -1)$.
71. Обчислити периметр і площу трикутника за координатами його вершин: $(-2; 1)$, $(2; -2)$ і $(8; 6)$.
72. Написати рівняння перпендикулярів до прямої $2x - 5y - 10 = 0$ в точках її перетину з осями системи координат.
73. У трикутнику з вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$ проведені висота BD і медіана BM . Написати рівняння сторони AC , медіани BM і висоти BD .
74. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і: 1) паралельна прямій $y = 4x + 3$; 2) перпендикулярна прямій $y = \frac{1}{2}x + 1$; 3) утворює кут, що дорівнює 45° , з прямою $y = 2x + 5$; 4) нахилена під кутом в 60° до прямої $y = x - 1$.
75. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $x + 3y = 0$; $x = 3$; $x - 2y + 3 = 0$.
76. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника – $y = 3$ та $x - y + 4 = 0$. Скласти рівняння третьої сторони, якщо вона проходить через початок системи координат.
77. Написати рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$ і паралельні його сторонам.
78. Знайти відстані точок $A(4; 3)$, $B(2; 1)$, $C(1; 0)$ від прямої $3x + 4y - 10 = 0$.
79. Знайти відстань між прямими $2x - 3y - 6 = 0$ і $4x - 6y - 25 = 0$.
80. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від початку координат і прямої $3x - 4y + 12 = 0$.
81. Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $A(0; 2)$, $B(1; 1)$, $C(2; -2)$.
82. Визначте центр і радіус кола, що задане рівнянням: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.
83. Звести до канонічного вигляду рівняння кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
84. Звести до канонічного вигляду рівняння кола $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.
85. Звести до канонічного вигляду рівняння кола $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.
86. Як перетвориться рівняння кола $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$, якщо перенести початок системи координат у точку $(-1; 3)$.
87. Скласти рівняння кола, що торкається осі OY у точці $A(0; -3)$ і має радіус $R = 2$.

88. Скласти рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$ в точці $(1; -2)$.

89. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Обчислити довжини осей, координати фокусів та його ексцентриситет.

90. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що півосі його дорівнюють 4 і 2 одиницям.

91. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що велика піввісь дорівнює 10 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$.

92. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що мала піввісь дорівнює 3 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

93. Еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3}; -2)$ і $N(-2\sqrt{3}; 1)$. Скласти його канонічне рівняння.

94. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{1}{2}x$ і одну з точок на гіперболі $M(12; 3\sqrt{3})$, скласти рівняння гіперболи.

95. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює 2.

Визначити типи кривих другого порядку:

96. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

97. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

98. $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$.

99. $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$.

100. $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$.

101. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

102. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0; 1; 3)$; $M_2(2; 4; 5)$; $M_3(1; -2; 1)$.

103. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведено площину перпендикулярно до $\overrightarrow{OM}$. Написати її рівняння.

104. Знайдіть кут між площинами $x - 2y + 2z - 8 = 0$ і $x + z - 6 = 0$.

105. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-1; -1; 2)$ і перпендикулярна до площин $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

106. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(2; 2; -2)$ і паралельна до площини $x - 2y - 3z = 0$.

107. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $O(0; 0; 0)$, $A(3; -2; 1)$ і $B(1; 4; 0)$.

108. Обчислити відстані точки $(3; 1; -1)$ до площини $22x + 4y - 20z - 45 = 0$.

109. Обчислити відстань між площинами $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ і $11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

110. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ і точку $(3; 4; 0)$.

111. Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

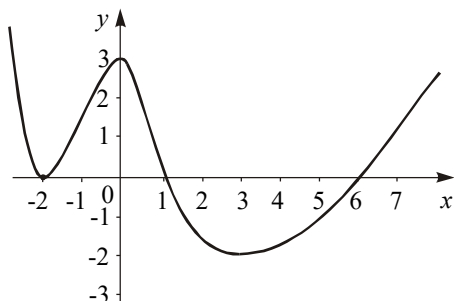
112. Визначити тип поверхні $x^2 - y^2 = 4z$ і знайти її твірні, що проходять через точку $(3; 1; 2)$.

113. Написати рівняння прямолінійних твірних гіперболоїда $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, що проходять через точку $(2; 4; 4)$.

114. Знайти найменший круговий переріз гіперболоїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{3z^2}{25} = 1$.

115. Написати рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$, що проходять через точку $(4; 3; 0)$.

116. Функцію задано графіком, зображеним на рисунку:



Визначити:

а) при яких значеннях x функція дорівнює нулю;

б) при яких значеннях x функція додатна;

в) при яких значеннях x функція від'ємна;

г) кількість значень x , при яких $f(x) = 1$, $f(x) = -4$, $f(x) = -1$.

117. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \sqrt{5 - 2x}$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;

118. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; 2) $y = \arcsin \frac{x}{4}$;

119. Визначити інтервали знакосталості функції $y = x^2 - 5x + 6$.

120. Побудувати графік функції, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$: $y = \frac{x-1}{x-2}$.

121. Побудувати графік функції, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$: $y = \frac{2x}{3-x}$.

122. Графічно розв'язати рівняння $x = 2 \sin x$.

123. Графічно розв'язати рівняння $x = \operatorname{tg} x$.

124. Графічно розв'язати рівняння $2^{-x} = \cos x$.

125. Побудувати фігуру, обмежену лініями $y = 2^x$, $y = \frac{1+x}{x}$, $x = 3$. За графіком наближено

знайти точки перетину цих ліній.

Знайти границі функцій:

126. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$.

127. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

128. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$.

129. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$.

130. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

131. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$.

132. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$.

133. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$.

134. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

135. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$.

136. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$.

$$137. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right).$$

$$138. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}.$$

$$139. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}.$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x^2}.$$

$$141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}.$$

$$142. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}.$$

$$143. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$144. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x}).$$

$$145. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}.$$

$$147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}.$$

$$148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}.$$

$$149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}.$$

$$151. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}.$$

$$152. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^x.$$

$$153. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$154. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x - 1}.$$

$$155. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}.$$

$$156. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$157. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x.$$

$$158. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x.$$

$$159. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

$$160. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}.$$

$$161. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

162. У якій точці дотична до параболи $y = x^3$: 1) паралельна осі OX ; 2) утворює кут 45° з віссю OX ?

163. Під якими кутами перетинаються парабола $y = x^2$ і пряма $3x - y - 2 = 0$?

164. Скласти рівняння дотичних до кривої $y = \frac{8}{4 + x^2}$:

1) в точці $x = 2$;

2) в точці перетину з віссю OY .

Знайти похідні функцій:

$$165. y = \left(1 + \sqrt[3]{x} \right)^3.$$

$$166. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

$$167. y = \sqrt{1 + \sqrt{2x}}.$$

$$168. y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2).$$

$$169. y = \lg(x - \cos x).$$

$$170. y = 3\cos^2 x - \cos^3 x.$$

$$171. y = 5\operatorname{tg} \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

$$172. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}.$$

$$173. y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x.$$

$$174. y = \sin x \cdot e^{\cos x}.$$

$$175. y = x^5 \sqrt[3]{x^6 - 8}.$$

$$176. y = e^{-x^2} \ln x.$$

$$177. y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}.$$

$$178. y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}.$$

$$179. y = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right).$$

$$180. y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}.$$

$$181. y = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right).$$

$$182. y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$183. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}.$$

$$184. y = \arcsin(\sin x).$$

$$185. y = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$186. y = \cos \frac{\arcsin x}{2}.$$

$$187. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$188. y = \ln \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$189. y = \arcsin(\ln x).$$

$$190. y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

$$191. y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}.$$

$$192. y = x^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

$$193. y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$194. y = x^3 \operatorname{arctg} x^3.$$

$$195. y = \frac{\arcsin 4x}{1 - 4x}.$$

$$196. y = e^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$197. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}.$$

$$198. y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$199. y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}.$$

$$200. y = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x).$$

$$201. y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

$$202. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$203. y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

$$204. y = \sqrt{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}.$$

Знайти похідні другого порядку:

$$205. y = x e^{x^2}.$$

$$206. y = \frac{1}{1+x^3}.$$

$$207. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$208. y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$209. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$210. y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}.$$

Визначити екстремуми функцій:

$$211. y = 2x^3 - 3x^2.$$

$$212. y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$$

$$213. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

$$214. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}.$$

Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

$$215. y = x^4 - 2x^2 + 5; [-2; 2].$$

$$216. y = x + 2\sqrt{x}; [0; 4].$$

$$217. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; [-1; 2].$$

$$218. y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; [-1; 1].$$

Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

$$219. y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

$$220. y = (x+1)^4 + e^x.$$

$$221. y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$$

$$222. y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4.$$

Знайти асимптоти таких ліній:

$$223. y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$224. 2y(x+1)^2 = x^3.$$

Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

$$225. y = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$226. y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$227. y = \frac{x}{x^2-1}.$$

$$228. y(x-1)(x-2)(x-3)=1.$$

$$229. y = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

$$230. y = (x^2-1)^3.$$

Розклавши підінтегральні функції за формулою $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$, знайти такі інтеграли:

$$231. \int \frac{\sqrt{x} + x^2 e^x - 1}{x^2} dx.$$

$$232. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$233. \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

$$234. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

$$235. \int e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$236. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$237. \int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$$

$$238. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx.$$

$$239. \int (3 + 7x^2)^5 x dx.$$

$$240. \int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}.$$

$$241. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$242. \int x^2 3^{x^3} dx.$$

$$243. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}.$$

$$244. \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$$

$$245. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$246. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} dx.$$

Знайти інтеграли, використовуючи найпростіші методи інтегрування:

$$247. \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$248. \int \frac{x + \ln(x-2)}{x-2} dx.$$

$$249. \int \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$250. \int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x} dx.$$

$$251. \int \frac{\cos^3 x + \sin x}{\cos x} dx.$$

$$252. \int \frac{x^2 - \ln(x+2)}{x+2} dx.$$

$$253. \int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx.$$

$$254. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$255. \int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx.$$

$$256. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

$$257. \int x \sin x dx.$$

$$258. \int x \cos 2x dx.$$

$$259. \int x e^{-x} dx.$$

$$260. \int x 5^x dx.$$

$$261. \int \arcsin x dx.$$

$$262. \int \operatorname{arcctg} x dx.$$

$$263. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$264. \int x^2 e^{3x} dx.$$

Методом підстановки знайти інтеграли:

$$265. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

$$266. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$267. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$268. \int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

Використовуючи метод підстановки, обчислити такі визначені інтеграли:

$$269. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$$

$$270. \int_0^1 (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx.$$

$$271. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$272. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$273. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$274. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

Інтегруванням частинами обчислити такі визначені інтеграли:

$$275. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$$

$$276. \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$277. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$278. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$$

Знайти довжини дуг ліній, що задані рівняннями:

279. $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

280. $y = 2\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 1$.

281. $y = e^x$ від $x = 0$ до $x = 1$.

282. $y = \sqrt[3]{x^2}$ від $x = 0$ до $x = 4$.

За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

283. $y = 1 - x^2$; $y = x^2 - 7$.

284. $4y = x^2$; $y^2 = 4x$.

285. $y = x^2 + 4x$; $y = x + 4$.

286. $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.

287. $y = -x^2 + 9$; $y = 2x + 1$.

288. $y = x^2$; $y = 2 - x^2$.

289. $y = x^2$; $y = 2 - x$.

290. $y^2 = 2x + 4$; $x = 0$.

Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

291. $xy' = y$.

292. $2xy' + y = 0$.

293. $yy' + x = 0$.

294. $y' = 2y$.

295. $y^2 y' = x^3$.

296. $x^2 y' + y = 0$.

297. $xyy' = 1 + x^2$.

298. $x^3 y' = 2y$.

299. $xy' = 2y$.

300. $y' \operatorname{tg} x = y$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови:

301. $y' + xy = xy^2$; $y = 2$ при $x = 0$. (Задача Коші.)

302. $xy' = 1 + y^2$, $y = 0$ при $x = 1$.

303. $y' = 2x + 2xy$, $y = 0$ при $x = 1$.

304. $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y = 1$ при $x = 0$.

305. $(1 + x^2)y' = 2xy$, $y = 2$ при $x = 0$.

306. $y' \operatorname{tg} x = y$, $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

307. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y = 1$ при $x = e$.

308. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$, $y = 1$ при $x = 0$.

309. $y' \sin x = y \ln y$, $y = e$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

310. $x + xy + y'(y + xy) = 0$, $y = 0$ при $x = 0$.

311. $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y = 1$ при $x = 0$.

312. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y = 1$ при $x = 0$.

Знайти загальні або частинні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь:

313. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$; $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$.

314. $y' = \frac{x + y}{x}$.

315. $y' = \frac{2y}{x}$.

316. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

317. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$.

318. $y' = 2\frac{x + y}{x}$; $y = 1$ при $x = 1$.

319. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$; $y = 1$ при $x = 1$.

320. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{2y}{x}$; $y = \frac{\pi}{4}$ при $x = 1$.

Розв'язати диференціальні рівняння в повних диференціалах:

321. $(3x^2y + 2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$.

322. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
323. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$.
324. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx + (y^2 - 3x^2y)dy$.
325. $(xdx + ydy)(x^2 + y^2) = xdy - ydx$.
326. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$.
327. $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.
328. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$.
329. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$.
330. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$.

Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

331. $y' x \ln \frac{x}{y} = y$.
332. $2xy^2 - y + xy' = 0$.
333. $xy' + y = xy^2 \ln x$.
334. $(1 - x^2)y' + xy = 2$.
335. $x^2(y+1)dx + (x^3 - 1)(y-1)dy = 0$.
336. $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) = (1 + y)dy$.
337. $y' - y \frac{2x-1}{x^2} = 1$.
338. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$.
339. $2cx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0$.
340. $xy' = y^2 - y$.

Розв'язати рівняння

341. $y'' = f(x)$.
342. $y'' = \cos x$; при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.
343. $y''' = 6x$; при $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = 0$.
344. $y'' = x \sin x$.
345. $y'' = 4e^{2x}$; $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$.
346. $y'' - y' = x$.

$$347. xy'' - y' = 2x.$$

$$348. xy'' - 2y' = \frac{1}{x}.$$

$$349. y'' + y' \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x.$$

$$350. xy'' + y' = 1; y = 0, y' = 1, x = 1.$$

Запишіть три перші члени ряду, а також u_{n+1} :

$$351. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n}.$$

$$352. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}.$$

$$353. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{n^n + n!}.$$

$$354. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-n)^n}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$355. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

$$356. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(-1)^n.$$

$$357. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} n}{2^n}.$$

Запишіть найпростішу формулу n -го члена ряду та перевірте виконання необхідної умови збіжності ряду.

$$358. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$359. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$360. \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$$

$$361. \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \frac{14}{16} + \dots$$

$$362. 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$363. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

$$364. 1 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{6} + \dots$$

$$365. \frac{\cos \alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 3\alpha}{3} + \dots$$

$$366. \arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3} + \dots$$

Перевірте виконання необхідної умови збіжності рядів:

$$367. 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

$$368. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots$$

$$369. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

$$370. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

$$371. 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \dots$$

$$372. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

$$373. 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^{n-1}}{n^2} + \dots$$

$$374. \frac{\ln 2}{1} + \frac{\ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} + \dots$$

$$375. \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots$$

$$376. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$377. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Дослідити збіжність рядів, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду.

Знайти їх суми:

$$378. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$379. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$380. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

За допомогою ознак порівняння дослідити збіжність рядів:

$$381. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}.$$

$$382. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+5}{n^3+10n+20}}.$$

$$383. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$384. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

$$385. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

$$386. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$387. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

$$388. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$$

$$389. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

$$390. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}.$$

Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки Даламбера:

$$391. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

$$392. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$393. 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$$

$$394. 1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$395. \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{18}} + \frac{9}{\sqrt{81}} + \frac{13}{\sqrt{324}} + \dots$$

$$396. 1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \frac{64}{4!} + \dots$$

397. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$

398. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n!}$.

399. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

400. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Виконати дії:

401. а) $(2+3i)+(-4+i)$; б) $(12-i)-(-3+i)$; в) $(-1+i)(-1-i)$; г) $i(1+i)$

402. В яких чвертях розміщені комплексні числа? а) $-3+i$; б) $4-i$; в) $-2-3i$; г) $2+i$

403. Обчислити: а) i^{16} ; б) i^{25} ; в) i^{15} ; г) i^{22} ;

Розв'язати рівняння:

404. $z^2 - 2z + 5 = 0$;

405. $z^2 + 3z + 3 = 0$;

406. $z^2 - 2iz - 5 = 0$;

407. $z^2 - (2+i)z - 1 + zi = 0$

Виконати дії:

408. $\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$;

409. $\frac{4+3i}{3-4i} - \frac{5-4i}{4+5i}$

410. Обчислити: $(1+i)^8$.

411. Знайти модуль і аргумент числа $\frac{8+2i}{5-3i}$

412. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z = \frac{(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})(\sqrt{3}+i)}{i-1}$

Піднести до степеня за формулою Муавра:

413. $(-1 + i\sqrt{3})^9$;

414. $(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^6$

Добути корінь:

415. $\sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}$;

416. $\sqrt[3]{8}$

Розв'язати рівняння:

417. $x^4 - 4x - 16 = 0$;

418. $x^4 - 2x + 4 = 0$

419. Знайти суму, різницю, добуток, частку двох комплексних чисел $(5+4i)$ та $(-2+3i)$.

420. Побудувати на числовій площині та знайти модуль комплексного числа $(-2+5i)$.

421. Знайти координати точки M , що зображує комплексне число $\frac{-2+5i}{1+3i} + i + \frac{-3+8i}{2-i}$

422. Знайти число спряжене з числом $\frac{1}{4} \left(\frac{17+31i}{7+i} + \frac{12}{(1+i)^4} \right) + i$

423. Представити комплексне число в тригонометричному вигляді $(6+4i)$

424. Знайти суму, різницю, добуток, частку двох комплексних чисел $(-1+5i)$ та $(6-3i)$.

425. Побудувати на числовій площині та знайти модуль комплексного числа $(-1+8i)$.

426. Знайти координати точки M , що зображує комплексне число $\frac{-3-2i}{2+3i} + i + \frac{3-5i}{8-i}$

427. Знайти число спряжене з числом $\frac{1}{2} \left(\frac{18+3i}{5-6i} + \frac{1+4i}{1+i} \right) + i$

428. Представити комплексне число в тригонометричному вигляді $(3-6i)$