

ЛЕКЦІЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

План лекції

1. Системи лінійних рівнянь
2. Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера
4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса
5. Зразки розв'язування задач

1. Системи лінійних рівнянь

Озн.: Системою m лінійних рівнянь з n змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система, яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, називається **розв'язком системи**, якщо при заміні x_1 на a_1 , x_2 на a_2 , ..., x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається **сумісною**.

Система, що не має жодного розв'язку, називається **несумісною**.

Система з єдиним розв'язком називається **визначеною**.

Система, що має більше, ніж один розв'язок називається **невизначаною**.

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

2. Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь

Матричний метод розв'язання лінійних систем.

Нехай дано систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається матрицею системи, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь не вироджена ($\Delta \neq 0$), то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь можна застосовувати лише тоді, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до

обчислення визначників. Так, розв'язок системи
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$
 можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

за умови, що $\Delta \neq 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ — називається визначником системи, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$
 мають

вигляд: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

— визначник системи, а

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} — \text{визначники,}$$

які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ ($\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$);

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ відмінний від нуля.

Формули Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь можна застосовувати лише тоді, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса використовують при будь-якій кількості невідомих і рівнянь. Цей спосіб полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи. Для зручності виконання перетворень для системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

n лінійних рівнянь з m невідомими утворюють відповідну їй розширену матрицю, вписуючи коефіцієнти біля невідомих та стовпчик вільних членів:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицю за допомогою елементарних перетворень матриці зводять до трикутного або трапецевидного виду.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса можливі наступні випадки:

- розширена матриця зведена до трикутного виду має єдиний розв'язок;
- розширена матриця зведена до трапецевидного виду має безліч розв'язків;
- зустрівся рядок виду $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b_i \neq 0)$ – розв'язків не має.

5. Зразки розв'язування задач

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 4y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 7x + y - 2z = 9 \end{cases} \text{ трьома методами:}$$

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса.

Розв'язання:

а) Обчислюємо головний визначник системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 52.$

Так як $\Delta \neq 0$, то можна застосовувати формули Крамера. Для цього обчислимо ще три визначники, які отримуємо із головного визначника системи послідовною заміною стовпчика з коефіцієнтів при змінних x, y, z стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 104,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -52,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 104.$$

Тепер скористаємося формулами Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{104}{52} = 2,$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-52}{52} = -1, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{104}{52} = 2.$$

Відповідь: $(2, -1, 2).$

б) Позначимо через A основну матрицю системи, через B – матрицю-стовпчик вільних членів, через X – матрицю-стовпчик невідомих:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Початкову систему можна записати в матричній формі у такому вигляді: $A \cdot X = B$. Так як $\det(A) \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} і розв'язок заданої системи можна записати у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо спочатку A^{-1} :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -(4 - 21) = 17; & A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-8 + 1) = 7; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 7 = -3; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 28) = 23; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 2) = -13; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13. \end{aligned}$$

Запишемо обернену матрицю:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 7 & 13 \\ 17 & -3 & -13 \\ -9 & 23 & 13 \end{pmatrix}; \\ X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 & 13 \\ 17 & -3 & -13 \\ -9 & 23 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 13 \cdot 9 \\ 17 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 13 \cdot 9 \\ -9 \cdot 4 + 23 \cdot 1 + 13 \cdot 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} 104 \\ -52 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $(2, -1, 2)$.

в) Утворюємо для заданої системи розширену матрицю, яку поступово будемо зводити до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці. Проілюструємо це на прикладі:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{i_1:5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{i_2+2*i_1 \\ i_3-7*i_1}} \\ &\xrightarrow{\substack{i_2+2*i_1 \\ i_3-7*i_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ -2+2*1 & 1+2*0,8 & 3+2*(-0,2) & 1+2*0,8 \\ 7-7*1 & 1-7*0,8 & -2-7*(-0,2) & 9-7*0,8 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ 0 & 2,6 & 2,6 & 2,6 \\ 0 & -4,6 & -0,6 & 3,4 \end{array} \right) \xrightarrow{i_2:2,6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4,6 & -0,6 & 3,4 \end{array} \right) \xrightarrow{i_3+4,6*i_2} \\ &\xrightarrow{i_3+4,6*i_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4,6+4,6*1 & -0,6+4,6*1 & 3,4+4,6*1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & -0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right) \end{aligned}$$

За допомогою елементарних перетворень розширена матриця звелася до трикутного виду. Отже, відповідна для трикутної матриці система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} x + 0,8y - 0,2z = 0,8, \\ y + z = 1, \\ 4z = 8. \end{cases}$$

Піднімаючись із останнього рівняння вгору, отримуємо очевидний розв'язок: $(2, -1, 2)$

Відповідь: $(2, -1, 2)$