

ЛЕКЦІЯ. ВИЗНАЧНИКИ

План лекції

1. Визначник та методи його розкриття.
2. Властивості визначників.
3. Мінори. Алгебраїчні доповнення.
4. Зразки розв'язування задач.

1. Визначник та методи його розкриття.

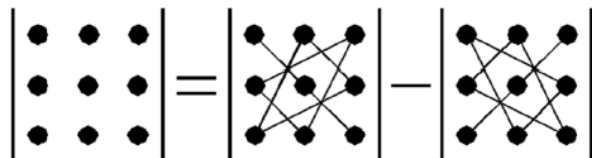
Вираз виду $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, називається **визначником** (детермінантом) **другого порядку**.

Вираз виду $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$, називається **визначником** (детермінантом) **третього порядку**.

Позначається Δ або $\det A$.

Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так:



2. Властивості визначників.

Значення визначника **не змінюється**, якщо

- його транспонувати, тобто замінити відповідними рядки відповідними стовпцями чи навпаки;
- до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільне число.

Значення визначника **дорівнює нулю**, якщо:

- визначник містить нульовий рядок (стовпчик);
- визначник має два однакових рядка (стовпця);

- всі елементи одного рядка (стовпця) визначника є пропорційними до елементів другого рядка (стовпця) цього визначника.

Значення визначника **зміниться на протилежне**, якщо:

- переставити місцями два довільних рядка (стовпчика).

3. Мінори. Алгебраїчні доповнення.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів $(i+j)$ – парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів $(i+j)$ – непарна:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Вираз виду $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ називається **визначником n -го порядку**.

Визначник вищого порядку обчислюють за допомогою визначників нижчого порядку розкладом за елементами якогось рядка або стовпця.

Теорема. (Теорема розкладу). Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Метод розкладу визначника за елементами рядків чи стовпців є найшвидшим при обчисленні визначників великих розмірів.

4. Зразки розв’язування задач

Обчислити визначники:

$$1. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

Розв’язання:

Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-6) = 2 + 18 = 20.$

Відповідь: 20.

$$2. \quad \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Відповідь: $4ab$.

$$3. \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta).$$

Відповідь: $\sin(\alpha - \beta)$.

$$4. \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) \cdot 5 = 30 - 12 - 2 - 9 - 8 - 10 = -11$$

Відповідь: -11 .

$$5. \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

Визначник четвертого порядку обчислимо за допомогою теореми розкладу.

Розкладемо визначник четвертого порядку за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot$$

$$(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Відповідь: -3 .