

ЛЕКЦІЯ. МАТРИЦІ

План лекції

1. Поняття матриці.
2. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця.
4. Зразки розв'язування задач.

1. Поняття матриці.

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij} , розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Перший індекс i кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий j – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$

В позначенні також використовують розмірність матриці $A_{m \times n}, B_{m \times n}, C_{m \times n}, \dots$

Матриця називається **числовою**, якщо її елементи a_{ij} – числа.

Матриця називається **функціональною**, якщо a_{ij} – функції.

Кажуть, що матриці A і B однакової розмірності, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців.

Матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ називаються } \textbf{рівними} \text{ (однаковими),}$$

якщо вони мають однакову кількість рядків та стовпців і всі їхні елементи, розташовані на однакових місцях, є рівними (тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх значень i та j).

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m = n$), називається **квадратною** матрицею порядку n .

Квадратна матриця порядку n має вигляд: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$, – допоміжну.

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця O , всі елементи якої – нулі. Нульова матриця

має вигляд: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Якщо всі елементи квадратної матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається **діагональною**.

Діагональна матриця має вигляд: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається **одиничною** матрицею.

Одинична матриця має вигляд: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T .

Транспонована матриця має вигляд: $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Матриця, у якої лише один рядок, називається **матрицею-рядком**.

$A = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$.

Матриця, у якої лише один стовпець, називається **матрицею-стовпцем**.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$.

2. Дії над матрицями

Сумою (різницею) матриць $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ однакової розмірності (кількістю рядків та стовпців матриці A дорівнює кількості стовпців і рядків матриці B) називається матриця $C=A+B$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакової розмірності.

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на число k називається матриця $B=k \cdot A$ кожен елемент якої утворюється за правилом $b_{ij}=k \cdot a_{ij}$, ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число.

Властивості додавання матриць. Для довільних матриць A, B, C однакової розмірності і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$A + B = B + A \text{ (комутативна властивість додавання);}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \text{ (асоціативна властивість додавання);}$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A;$$

$$\alpha (AB) = (\alpha A) B;$$

$$k \cdot O = O \cdot k = O \quad A + O = O + A = A;$$

$$\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A; (A \alpha) \beta = A (\alpha\beta);$$

Добутком матриці $A_{m \times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n \times p}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times p} = AB$, елементи якої

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Перемножити можна тільки узгоджені матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Тобто, з існування добутку AB не означає, що існує добуток BA .

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **комутативними**.

Комутативними завжди будуть квадратні матриці однакової розмірності.

Властивості множення матриць:

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ (властивість множення на одиничну матрицю);}$$

$$O \cdot A = A \cdot O = O \text{ (властивість множення на нульову матрицю);}$$

$$(A + B) C = AC + BC; C (A + B) = CA + CB.$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (комутативна властивість множення матриць не виконується).

Розглянемо добуток двох квадратних матриць другого порядку.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Обернена матриця.

Квадратна матриця A називається **виродженою**, якщо визначник дорівнює нулю, і **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю.

Якщо A – квадратна матриця, то оберненою до неї є матриця, яка при множенні не A дає у відповіді одиничну матрицю.

Позначають обернену матрицю A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Для того, щоб квадратна матриця мала обернену матрицю, достатньо і необхідно, щоб матриця A була невинродженою, тобто її визначник не дорівнював нулю.

За умови $\Delta A \neq 0$, обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/\Delta & A_{12}/\Delta & A_{13}/\Delta \\ A_{21}/\Delta & A_{22}/\Delta & A_{23}/\Delta \\ A_{31}/\Delta & A_{32}/\Delta & A_{33}/\Delta \end{pmatrix}$$

4. Зразки розв'язування задач.

1. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Знайти суму матриць.

Розв'язання:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $-5 \cdot A$.

Розв'язання:

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix}.$

3. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A \cdot B$.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$

4. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $B \cdot A$.

Розв'язання:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$

5. Транспонувати матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ та $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 7 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$

6. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Для знаходження оберненої матриці використовують таку схему:

1. Знайти визначник матриці: $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10, \Delta A \neq 0$, отже A^{-1} існує.

2. Знайти алгебраїчні доповнення усіх елементів a_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

3. Записати нову матрицю: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. Транспонувати одержану матрицю: $A_{ij}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$

5. Помножити A_{ij}^T на $\frac{1}{\Delta}$: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A_{ij}^T = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$

7. Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Розв'язання:

Знайдемо визначник матриці: $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 0 + 12 + 9 - 0 - 0 =$

14, $\Delta A \neq 0$, отже A^{-1} існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення усіх елементів a_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6, A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Записуємо нову матрицю: $A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Транспонуємо одержану матрицю: $A_{ij}^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$

Множимо A_{ij}^T на $\frac{1}{\Delta}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A_{ij}^T = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/7 & -1/7 & -1/7 \\ 3/14 & 3/7 & -1/14 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/7 & -1/7 & -1/7 \\ 3/14 & 3/7 & -1/14 \end{pmatrix}.$